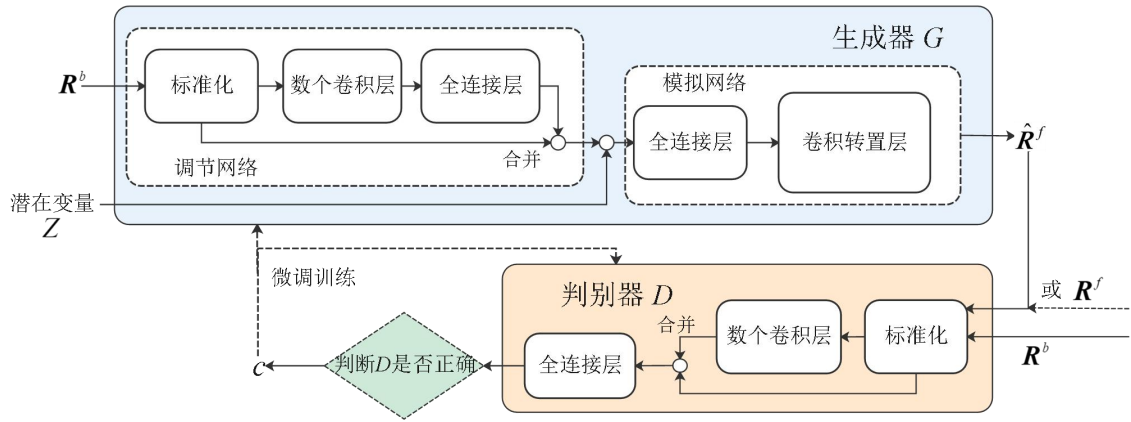




附图1 LSGANs中生成器和判别器的结构图

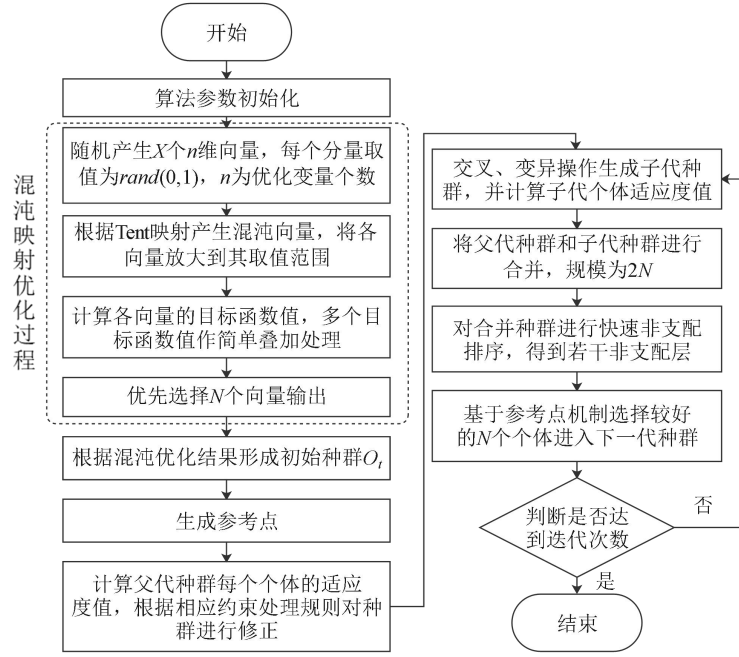
#### 附录 1 定理 1 和定理 2 的证明

定理 1 证明：对于风险厌恶型投资者，效用函数有  $\Omega_{(1)}'(\delta) > 0, \forall \delta$  且  $\Omega_{(2)}'(\delta) < 0, \forall \delta$ 。根据投资者在  $n$  阶矩上偏好方向严格一致，效用函数有  $\Omega_{(n)}'(\delta) > 0$  或  $\Omega_{(n)}'(\delta) = 0$  或  $\Omega_{(n)}'(\delta) < 0, \forall \delta$ 。根据原文投资者效用的表达式可知，只需证明对任意  $\delta$  有  $\Omega_{(3)}'(\delta) > 0$ ，可得当其系数  $S_{kew}^3$ （偏度）越大时，投资者的效用越高。

假设对任意  $\delta$ ， $\Omega_{(3)}'(\delta) < 0$  或  $\Omega_{(3)}'(\delta) = 0$  成立。根据有限增量定理，对于  $\delta_2 > \delta_1$ ，存在  $\bar{\delta} \in (\delta_1, \delta_2)$ ，使得  $\Omega_{(2)}'(\bar{\delta}) = \frac{\Omega_{(1)}'(\delta_2) - \Omega_{(1)}'(\delta_1)}{\delta_2 - \delta_1}$ 。整理该等式得  $\Omega_{(1)}'(\delta_2) = \Omega_{(2)}'(\bar{\delta})(\delta_2 - \delta_1) + \Omega_{(1)}'(\delta_1)$ 。由  $\Omega_{(3)}'(\delta) \leq 0, \forall \delta$  可得， $\Omega_{(2)}'(\delta_1) \geq \Omega_{(2)}'(\bar{\delta})$ ，进一步有  $\Omega_{(1)}'(\delta_2) \leq \Omega_{(2)}'(\delta_1)(\delta_2 - \delta_1) + \Omega_{(1)}'(\delta_1)$ 。对于  $\delta_2 \geq \delta^* = \delta_1 + \frac{\Omega_{(1)}'(\delta_1)}{-\Omega_{(2)}'(\delta_1)}$ ，有  $\Omega_{(1)}'(\delta_2) \leq 0$ ，对于  $\delta_2 > \delta^*$ ，有  $\Omega_{(1)}'(\delta_2) < 0$ 。这与  $\Omega_{(1)}'(\delta) > 0$  相矛盾。因此，对任意  $\delta$  有  $\Omega_{(3)}'(\delta) > 0$  成立。证毕。

定理 2 证明：同理，只需要证明对任意  $\delta$  有  $\Omega_{(4)}'(\delta) < 0$ ，可知当其系数  $K_{urt}^4$  越小时，投资者的效用越高。

假设对任意  $\delta$ ， $\Omega_{(4)}'(\delta) > 0$  或  $\Omega_{(4)}'(\delta) = 0$  成立。根据有限增量定理，对于  $\delta_2 > \delta_1$ ，存在  $\bar{\delta} \in (\delta_1, \delta_2)$ ，使得  $\Omega_{(2)}'(\bar{\delta}) \geq \Omega_{(3)}'(\delta_1)(\delta_2 - \delta_1) + \Omega_{(2)}'(\delta_1)$ 。对于  $\delta_2 \geq \delta^* = \delta_1 + \frac{-\Omega_{(2)}'(\delta_1)}{\Omega_{(3)}'(\delta_1)}$ ，有  $\Omega_{(2)}'(\delta_2) \geq 0$ ，对于  $\delta_2 > \delta^*$ ，有  $\Omega_{(2)}'(\delta_2) > 0$ 。这与  $\Omega_{(2)}'(\delta) < 0$  相矛盾。因此，对任意  $\delta$  有  $\Omega_{(4)}'(\delta) < 0$  成立。证毕。



附图2 INSGA-III算法流程图

## 附录2 评价指标计算公式

夏普比率 (Sharpe Ratio, SR), 计算公式为:

$$SR = \frac{E(R_{port}) - R_L}{std(R_{port})}$$

其中,  $R_{port}$  为投资组合的收益率,  $R_L$  为无风险投资日收益率, 本文取 0.00012。

偏度修正后的 Sharpe Ratio (ASR), 计算公式为:

$$ASR = SR \sqrt{1 + \frac{Skew(R_{port})}{3}} SR$$

平均绝对偏差比 (Mean Absolute Deviation Ratio, MADR), 计算公式为:

$$MADR = \frac{E(R_{port})}{E(|R_{port} - E(R_{port})|)}$$

Sortino-Satchell 比率 (Sortino-Satchell Ratio, SSR), 计算公式为:

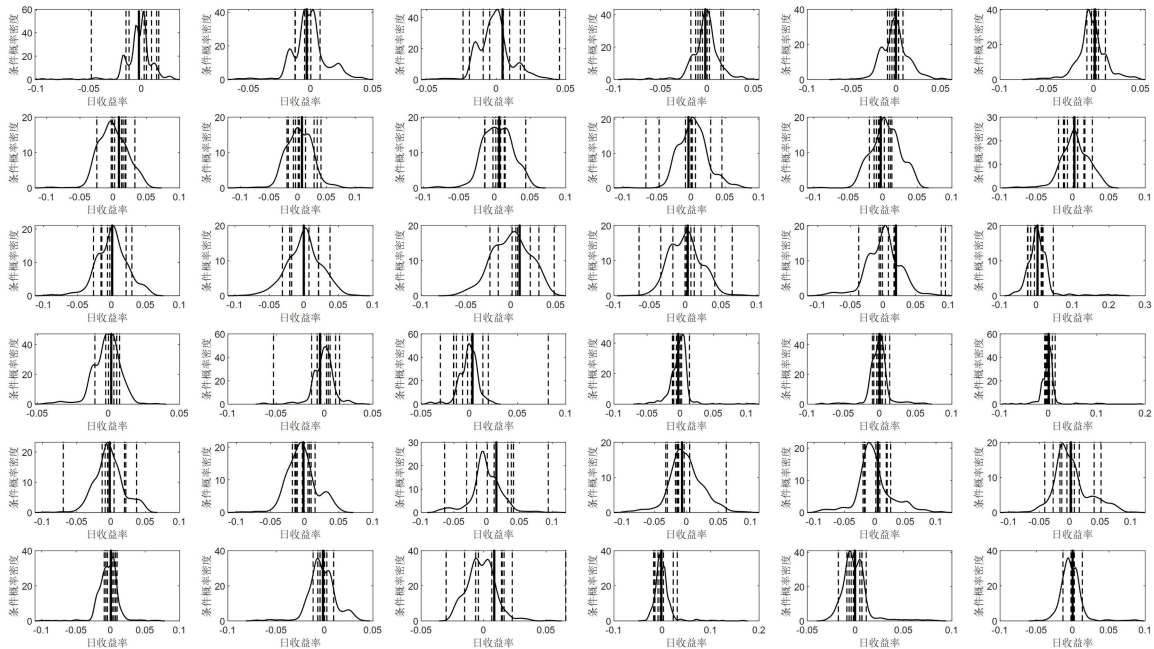
$$SSR = \frac{E(R_{port})}{\sqrt{E(\max(-R_{port}, 0)^2)}}$$

其中,  $E\left(\max(-R_{port}, 0)^2\right)$  表示二阶下偏矩。SSR 与 SR 类似, 区别在于该指标通过引入二阶下偏矩替代标准差的方法区分了波动的好坏, 即投资组合的正回报率符合投资者的偏好, 不应计入风险调整。

Farinelli 和 Tibiletti 比率 (Farinelli 和 Tibiletti Ratio, FTR), 计算公式为:

$$FTR = \frac{\sqrt[u]{E\left(\max(R_{port}, 0)^u\right)}}{\sqrt[v]{E\left(\max(-R_{port}, 0)^v\right)}}$$

其中  $\sqrt[u]{E\left(\max(R_{port}, 0)^u\right)}$  和  $\sqrt[v]{E\left(\max(-R_{port}, 0)^v\right)}$  分别代表  $u$  阶上阶矩和  $v$  阶下阶矩, 并且当  $u$  和  $v$  取不同值时代表了投资者不同的投资偏好, 即  $\{u=0.5, v=2\}$  代表防御型投资者;  $\{u=1.5, v=2\}$  代表保守型投资者;  $\{u=1, v=1\}$  代表适度型投资者。



附图3 股票收益的概率密度预测结果与真实收益对比图

注: 图6为抽取的6只股票(按股票序号排序, 使用rand函数随机抽取)在前6个周期的真实收益情况和概率密度预测的结果。垂直虚线代表未来十个交易日的真实日收益率, 垂直实线代表未来十个交易日的平均收益率, 曲线代表由LSGANs+KDE预测输出的概率密度曲线。图6的1~6行依次对应随机抽取的6只股票<sup>①</sup>的概率密度对比结果。1~6列依次对应前6个周期<sup>②</sup>的概率密度对比结果。

①股票代码分别为: 600028、600276、600346、601398、601601 和 601857。

②日期对应为: 2020年6月1日至6月12日; 2020年6月15日至6月30日; 2020年7月1日至7月14日; 2020年7月15日至7月28日; 2020年7月29日至8月11日; 2020年8月12日至8月25日。